

## ESPACIOS DE SOBOLEV

### Ejemplos básicos - [3]

1. >Para qué valores de  $\alpha > 0$  vale que  $u(x) := |x|^{-\alpha}$  pertenece a  $W^{1,p}(B_1(0))$ ? Para  $n > p$ , construya una función de  $W^{1,p}(B_1(0))$  que no es acotada en ningún subconjunto abierto de  $B_1(0)$ .
2. Sea  $u = \chi_B$  donde  $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ . Muestre que  $\partial_i u = -\nu_i H_{|\partial B}^{n-1}$  en el sentido de las distribuciones. En particular  $u$  no pertenece a ningún  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

### Aproximación - [3]

1. Sea  $u \in W^{k,p}(U)$ ,  $|\alpha| \leq k$ ,  $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \rho(x/\epsilon)$  y  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Probar que  $D^\alpha u_\epsilon = \rho_\epsilon * D^\alpha u$ .
2. Muestre que si  $U$  es conexo y  $u \in W^{1,p}(U)$  verifica que  $Du = 0$  c.t.p.  $U$ , entonces  $u$  es constante c.t.p.  $U$ .

### Espacios de Sobolev en $\mathbb{R}$ - [1]

Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $u \in W^{1,p}(I)$  para un  $p \in [1, +\infty]$ .

1. Probar que  $u$  coincide en casi todo punto con una función  $\tilde{u} \in C(I)$  y que

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t) dt$$

para casi todo  $x, y \in [0, 1]$ , donde  $u'$  es la derivada débil de  $u$ . Siempre se identificará  $u$  con  $\tilde{u}$ .

Sug: dado algún punto  $a \in I$ , considerar  $\bar{u}(x) := \int_a^x u'(t) dt$ . Probar que  $\bar{u}$  es continua en  $I$  y que su derivada débil es  $u'$ .

2. Deducir que

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_p |x - y|^{1-1/p}.$$

3. Supongamos ahora  $I$  acotado y  $p > 1$ . Probar que la inyección de  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$  es compacta.

### Regla de la cadena - [3]

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto acotado y  $u \in W^{1,p}(U)$  con  $1 < p < \infty$ .

1. Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  con  $F'$  acotada. Pruebe que  $F(u) \in W^{1,p}(U)$  con  $\partial_i(F(u)) = F'(u)\partial_i u$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sug: aproximar  $u$  por funciones suaves.
2. Probar que  $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$  con

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{c.t.p. } \{u > 0\} \\ 0 & \text{c.t.p. } \{u \leq 0\} \end{cases}, \quad Du^- = \begin{cases} 0 & \text{c.t.p. } \{u \leq 0\} \\ Du & \text{c.t.p. } \{u > 0\} \end{cases},$$

Sug: considerar la función  $F_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , definida por

$$F_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon^2 + x^2} - \varepsilon & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

3. Deducir que  $|u| \in W^{1,p}(U)$  y que  $Du = 0$  c.t.p.  $\{u = 0\}$ .

### Diferencias finitas - [3]

Sea  $u \in L^1_{loc}(U)$ . definimos

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad i = 1, \dots, n, \quad 0 < |h| < \text{dist}(x, \partial U),$$

y  $D^h u = (D_1^h u, \dots, D_n^h u)$ .

1. Si  $u \in W^{1,p}(U)$  para un  $p \in [1, +\infty)$  probar que para todo abierto  $V \subset\subset U$  existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)} \quad \forall 0 < |h| < \text{dist}(V, \partial U).$$

2. Supongamos reciprocamente que  $u \in L^p(U)$  para un  $p \in [1, +\infty)$  y que

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \quad \forall 0 < |h| < \text{dist}(V, \partial U)$$

para una constante  $C > 0$  independiente de  $h$ . Probar que  $u \in W^{1,p}(V)$  con  $\|Du\|_{L^p(V)} \leq C$ .

Sug: como los  $D^h u$  estan acotados en  $L^p(V)$  tienen una subsucesion que converge debilmente ...

## Traza

1. Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto acotado  $C^1$ .

a) Probar que si  $u \in W^{1,p}(U)$  y  $v \in W^{1,p'}(U)$  entonces vale la fórmula de integración por partes

$$\int_U u \partial_i v = - \int_U \partial_i u \cdot v + \int_{\partial U} u v n_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

donde  $n$  es el vector normal unitario exterior a  $U$ .

b) Probar que si  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  y  $u \in W^{1,p}(U)$  entonces vale la fórmula de Green

$$\int_U \phi \nabla u = - \int_U u \operatorname{div} \phi + \int_{\partial U} u \phi n.$$

2. Consideramos  $u \in W^{1,p}(U)$  y  $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{U})$  y definimos

$$\bar{u} = \begin{cases} u & \text{en } U, \\ v & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}. \end{cases}$$

Probar que  $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  con  $\nabla \bar{u} = \nabla u 1_U + \nabla v 1_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{U}}$  ssi  $u = v$  en  $\partial U$ .

## Desigualdad de Nash, Gagliardo-Nirenberg y log-Sobolev

1. Probar la desigualdad de Nash: existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \right)^{1 + \frac{2}{n}} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u| dx \right)^{\frac{4}{n}} \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

2. Mas generalmente probar las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg: para  $1 \leq s \leq r \leq p^*$ ,  $1 \leq p < n$ , dados existe una constante  $C_{n,p} > 0$  tal que

$$\|u\|_r \leq C_{n,p}^\theta \|\nabla u\|_p^\theta \|u\|_s^{1-\theta} \quad \text{con } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p^*} + \frac{1-\theta}{s}$$

para toda  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Se puede encontrar facilmente  $\theta$  por un argumento de scaling considerando las funciones  $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ . Observe que las desigualdades de Sobolev y Nash son casos particulares.

3. Consideramos el caso particular  $r = p$  con  $s < p$ :

$$\|u\|_p^{\frac{p}{\theta}} \leq C_{n,p}^p \|\nabla u\|_p^p \|u\|_s^{\frac{p(1-\theta)}{\theta}}, \quad \text{con } \frac{p(1-\theta)}{\theta} = \frac{sp^2}{n(p-s)}, \quad s < p$$

o sea para  $u$  tal que  $\|u\|_p = 1$ ,

$$1 \leq C_{n,p}^p \|\nabla u\|_p^p \|u\|_s^{\frac{sp^2}{n(p-s)}}. \quad (1)$$

Queremos pasar al límite  $\theta \rightarrow 0$  es decir  $s \rightarrow p$  en esta desigualdad para encontrar la siguiente desigualdad de Sobolev logarítmica:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \ln |u|^p dx \leq \frac{n}{p} (\ln \|\nabla u\|_p^p). \quad (2)$$

a) Verificar que (1) se puede reescribe como

$$p\Phi(s) \leq \frac{n}{p} \ln (C_{n,p}^p \|\nabla u\|_p^p), \quad s < p$$

con

$$\Phi(s) = \frac{\phi(s)}{s-p} = \frac{\phi(s) - \phi(p)}{s-p} \quad \text{y} \quad \phi(s) = \ln \int |u|^s.$$

- b) Probar que  $\phi$  es convexa. Luego sabemos que  $\Phi$  es creciente en  $(0, p)$   
c) Probar que  $\phi'(p) = \int |u|^p \ln |u|$ . Prolongamos entonces  $\Phi$  por continuidad en  $p$  con  $\Phi(p) = \int |u|^p \ln |u|$ .  
d) Deducir (2) y que (1) y (2) son equivalentes.

### Desigualdad de Poincaré - [3]

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto acotado suave y  $1 \leq p \leq +\infty$ .

1. Probar que existe  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p \quad \text{para toda } u \in W_0^{1,p}(U).$$

Sug: razonar por el absurdo.

2. Probar que esta desigualdad sigue valiendo para funciones que se anulan unicamente en un conjunto  $\Gamma \subset \partial U$  con  $\int_{\Gamma} d\sigma > 0$  si suponemos además que  $U$  es conexo.  
3. Suponemos  $U$  conexo. Probar que existe  $C > 0$  tal que

$$\|u - \bar{u}\|_p \leq C \|\nabla u\|_p \quad \text{para toda } u \in W^{1,p}(U),$$

donde  $\bar{u} := \frac{1}{|U|} \int_U u$  es el promedio de  $u$  sobre  $U$ .

## Caracterización de $H^k(\mathbb{R}^n)$ con la transformada de Fourier y espacios de Sobolev fraccionarios - [2, 3]

Notamos  $\hat{u}$  la transformada de Fourier de  $u$ .

1. Probar que  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  pertenece a  $H^k(\mathbb{R}^n)$  ssi  $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y que existe  $C > 0$  tal que

$$\frac{1}{C} \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}.$$

Para  $s > 0$  definimos el espacio  $H^s(\mathbb{R}^n)$  por

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ tq } (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

con la norma  $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ . Extendemos a  $H^s(\mathbb{R}^n)$  las inyecciones de Sobolev:

2. Supongamos  $2s > n$ . Escribiendo

$$\hat{u}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi), \quad (3)$$

probar que  $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y luego que  $u \in C(\mathbb{R}^n)$ . Deducir que si  $2s > n + m$  entonces  $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ .

3. Supongamos  $2s < n$ . Usando (3) probar que  $\hat{u} \in L^r(\mathbb{R}^n)$  para todo  $r > \frac{2n}{2s+n}$ . Recordando que la transformada de Fourier es continua de  $L^r(\mathbb{R}^n)$  en  $L^{r'}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq r \leq 2$ , deducir que  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  para todo  $2 \leq p < \frac{2n}{n-2s}$ . (nota: el caso límite  $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}(\mathbb{R}^n)$  vale pero es mas difícil de obtener.)
4. Supongamos  $2s = n$ . Verificar que  $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^n)$  si  $s' \leq s$ . Usando el item anterior probar que  $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$  para todo  $2 \leq p < \infty$ .

Supongamos ahora que  $s \in (0, 1)$ .

5. Probar que  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  ssi  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(x + he_i)|^2}{|h|^{1+2s}} dx dh < +\infty \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Nota: este resultado lleva a definir los espacios de Sobolev fraccionarios  $W^{s,p}(U)$ ,  $0 < s < 1$ , por

$$W^{s,p}(U) = \left\{ u \in L^p(U) \text{ tq } \int_U \int_U \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|h|^{n+sp}} dx dy < +\infty \right\}.$$

## Referencias

- [1] H. Brezis, análisis funcional.
- [2] F. Demengel, Espaces fonctionnels.
- [3] L.C. Evans, Partial differential equations.